nicht durch elektrische oder magnetische Modulationseffekte erklärt werden. Es bestehen aber direkte Zusammenhänge mit Eruptionen auf der Sonne. Die sternzeitliche Periode konnte in dem offenen Schacht mit K 3 nachgewiesen werden.

Die Messungen werden fortgesetzt. Die Untersuchungen gelten nun dem Verhalten der Strahlung bei abnehmender Sonnentätigkeit.

Der Verfasser dankt seinen Mitarbeitern für die Auswertung der Registrierungen und für die Durchführung der Berechnungen. Die Mittel wurden vom Staatssekretariat für Hochschulwesen zur Verfügung gestellt, wofür ebenfalls gedankt sei. Schließlich ist der Verfasser dem Fraunhofer-Institut in Freiburg (Br.), den Geomagnetischen Instituten in Göttingen und Potsdam, dem Max-Planck-Institut für Aeronomie in Lindau (Harz) und dem Wetterdienst der DDR für die Überlassung der laufenden Beobachtungen zu Dank verpflichtet.

Negative elektrische Leitfähigkeiten

Von Jürgen Schneider

Aus dem Institut für Elektrowerkstoffe, Freiburg (Brg.)

(Z. Naturforschg. **15 a**, 484—489 [1960]; eingegangen am 2. Februar 1960)

The complex electric HF-conductivity σ of a plasma in a magnetic field has been calculated on the basis of the Boltzmann transport equation. Negative values of the real part of σ can occur, if the system is in a state of overpopulation, i. e. if $\partial f_0/\mathrm{d}p > 0$, where f_0 is the momentum distribution function of the free carriers. Furthermore, the collision frequency or the mass of the carriers must be dependent on the momentum p.

In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen der Realteil der elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas in einem Magnetfeld negative Werte annehmen kann. In diesem Fall würde das Plasma auf eine einfallende elektromagnetische Welle eine negative Dämpfung ausüben, so daß die Möglichkeit besteht, ein Plasma als Verstärker und Generator von Mikrowellen zu verwenden. Als Plasmen kommen einmal ionisierte Gase in Betracht, aber im übertragenen Sinne auch Halbleiter und Metalle.

Bekanntlich umlaufen geladene Teilchen in einem homogenen Magnetfeld die Feldlinien auf Spiralbahnen, mit der Zyklotronkreisfrequenz

$$\omega_c = e\,B/m\,c\,,$$

e und m Ladung und Masse des Teilchens,
B Stärke des Magnetfeldes,
c Lichtgeschwindigkeit.

Ein im thermischen Gleichgewicht befindliches Plasma wird einem elektrischen Wechselfeld der Kreisfrequenz ω, welches senkrecht zum statischen Magnetfeld polarisiert ist, im Resonanzfall $\omega = \omega_c$ Energie entziehen. Über die Theorie dieser Zyklotronresonanz liegen eine Reihe von eingehenden Untersuchungen [1] vor. Die elektrischen Eigenschaften eines Plasmas werden am zweckmäßigsten durch die komplexe elektrische Leitfähigkeit beschrieben. Der folgende Abschnitt bringt eine einfache Ableitung dieser Größe.

Die Boltzmannsche Transportgleichung

Ausgangspunkt für eine Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas nach statistischen Methoden ist die Boltzmannsche Transportgleichung [2]. Diese ist die Differentialgleichung der Impulsverteilungsfunktion f der freien Ladungsträger. Bei Abwesenheit äußerer Kräfte sei f kugelsymmetrisch, d. h. nur vom Betrage p des Impulses abhängig. Unter dem Einfluß eines äußeren homogenen elektrischen Feldes werden die Ladungen eine Beschleunigung in einer bestimmten Richtung erhalten, so daß die so gestörte Verteilungsfunktion nicht länger kugelsymmetrisch sein wird. Das heißt nichts anderes als daß sich im Plasma ein makroskopischer elektrischer Strom gebildet hat. Dieser soll jetzt berechnet werden.

Die Boltzmannsche Transportgleichung der Verteilungsfunktion f des Impulses $\mathfrak{p}$ der Ladungsträger

[1] L. G. H. Huxley, Proc. Phys. Soc., Lond. B **64**, 844 [1951]. — R. Jancel u. T. Kahan, J. Phys. Radium **14**, 533 [1953]. — W. P. Allis, in Handbuch der Physik XXI, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956. — D. C. Kelly, H. Margenau u. S. C. Brown, Phys. Rev. **108**, 1367 [1957]. — J. Schneider u. F. W. Hofmann, Phys. Rev. **116**, 244 [1959]. Diese Arbeiten behandeln Zyklotronresonanz in schwach ionisierten Gasen. Für Festkörper siehe: B. Lax, Rev. Mod. Phys. **30**, 122 [1958].

[2] siehe z. B.: C. Kittel, Elementary Statistical Physics, Wiley & Sons, New York 1958.

lautet:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t} \operatorname{grad}_{\mathfrak{p}} f = -\frac{1}{\tau}(f - f_0). \qquad (1)$$

Bei Abwesenheit äußerer Kräfte, d. h. für $\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t = 0$, beschreibt diese Gleichung einen Ausgleichsprozeß; die gestörte Verteilungsfunktion $f(t)$ stellt sich mit einer charakteristischen Relaxationszeit τ exponentiell wieder auf den ursprünglichen Wert f_0 ein. Die Bedeutung dieser, meist durch Stöße bedingten, Relaxationszeit wird weiter unten erläutert werden. Im allgemeinen wird τ impulsabhängig sein. Die Kraft, welche ein elektrisches Wechselfeld $\mathfrak{E} \exp(i\,\omega\,t)$ und ein zeitlich konstantes Magnetfeld $\mathfrak{B}$ auf eine Ladung e der Masse m und des Impulses $\mathfrak{p}$ ausüben, ist:

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t} = e\,\mathfrak{E} \exp(i\,\omega\,t) + \frac{e}{m\,c}\,\mathfrak{p} \times \mathfrak{B}. \qquad (2)$$

Das Magnetfeld liege parallel zur z-Achse, das elektrische Feld senkrecht zu dieser. Um die BOLTZMANN-Gleichung in erster Näherung zu lösen, macht man dann den Ansatz

$$f = f_0(p) + (p_x f_1 + p_y f_2) \exp(i\,\omega\,t), \qquad (3)$$

wobei f_1 und f_2 kleine, unbestimmte Funktionen sind, die nur vom Betrage p des Impulses abhängen. Die Gln. (2) und (3) werden in die BOLTZMANNsche Gl. (1) eingesetzt, und Glieder zweiter Ordnung in f_1, f_2 und E seien vernachlässigt. Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von p_x und p_y ergeben sich dann zwei lineare Gleichungen für f_1 und f_2, mit der Lösung:

$$f_1 = -\left(\frac{E_+}{1+i(\omega+\omega_c)\tau} + \frac{E_-}{1+i(\omega-\omega_c)\tau}\right)\frac{e\,\tau}{2\,p}\,\frac{\partial f_0}{\partial p} \qquad (4\,\mathrm{a})$$

$$f_2 = -i\left(\frac{-E_+}{1+i(\omega+\omega_c)\tau} + \frac{E_-}{1+i(\omega-\omega_c)\tau}\right)\frac{e\,\tau}{2\,p}\,\frac{\partial f_0}{\partial p}. \qquad (4\,\mathrm{b})$$

An Stelle eines linear polarisierten elektrischen Feldes wurden rechts- bzw. linkszirkular polarisierte Felder $E_\pm = E_x \pm i\,E_y$ eingeführt, welche der Symmetrie des vorliegenden Problemes besser angepaßt sind. Damit ist die durch das äußere Feld gestörte Verteilungsfunktion f bestimmt, und die elektrische Stromdichte $\mathfrak{J}$ ergibt sich aus:

$$\mathfrak{J} = e \iiint \frac{1}{m}\,\mathfrak{p}\,f\,\mathrm{d}p_x\,\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z. \qquad (5)$$

Die Integrationsgrenzen sind $\pm\infty$ für jede Impulskomponente. Mit Hilfe von Gl. (3) folgt hieraus bei Benutzung von Kugelkoordinaten im Impulsraum:

$$J_\pm = \frac{4\,\pi}{3}\,e \int_0^\infty \frac{1}{m}\,(f_1 \pm i\,f_2)\,p^4\,\mathrm{d}p \exp(i\,\omega\,t). \qquad (6)$$

Die komplexe elektrische Leitfähigkeit $\sigma_\pm$, definiert durch

$$J_\pm = \sigma_\pm\,E_\pm \exp(i\,\omega\,t), \qquad (7)$$

lautet demnach:

$$\sigma_\pm = -\frac{4\,\pi}{3}\,e^2 \int_0^\infty \frac{\tau}{1+i(\omega\pm\omega_c)\tau}\,\frac{1}{m}\,p^3\,\frac{\partial f_0}{\partial p}\,\mathrm{d}p. \qquad (8)$$

Die Leitfähigkeit σ_z parallel zum Magnetfeld ergibt sich aus der obigen Formel mit $\omega_c = 0$, da ja auf eine Ladung, welche sich in Richtung der magnetischen Feldlinien bewegt, keine LORENTZ-Kraft wirkt. Daher ist auch σ_z identisch mit der Leitfähigkeit bei Abwesenheit eines Magnetfeldes. Die Verteilungsfunktion $f_0(p)$ ist normiert durch die Bedingung

$$4\,\pi \int_0^\infty f_0\,p^2\,\mathrm{d}p = N, \qquad (9)$$

wobei N die Zahl pro cm^3 der freien Ladungen ist. Für den Sonderfall, daß sowohl die Relaxationszeit τ wie die Trägermasse m impulsunabhängig sind, läßt sich hiermit Gl. (8) vereinfacht schreiben

$$\sigma_\pm = \frac{N\,e^2\,\tau}{m}\,\frac{1}{1+i(\omega\pm\omega_c)\,\tau}. \qquad (10)$$

In der vorangehenden Rechnung wurde nur der Beitrag eines Ladungstyps zur elektrischen Leitfähigkeit berücksichtigt. In gasförmigen Plasmen ist dies gerechtfertigt, da der von den Elektronen getragene Ladungstransport denjenigen der viel schwereren Ionen bei weitem überwiegt. Dagegen ist in Festkörpern die Lage komplizierter, da einmal zu der elektronischen Leitfähigkeit auch noch diejenige der positiven Löcher treten kann, und da die effektiven Massen sowohl der Löcher wie die der Elektronen im allgemeinen als tensorielle Größen aufzufassen sind.

Die Relaxationszeit τ

Zunächst sei die physikalische Bedeutung der Relaxationszeit näher erläutert. Besonders einfach liegen die Verhältnisse in einem verdünnten, gasförmigen Plasma, in welchem die Konzentration der freien Ladungen sehr viel kleiner ist als diejenige der neutralen Teilchen. Charakteristisch für ein solches verdünntes Plasma ist es, daß Stöße zwischen Ladungen sehr unwahrscheinlich sind, verglichen mit Stoßprozessen zwischen geladenen und neutralen Teilchen. Da der von den Elektronen getragene Ladungstransport denjenigen der viel schwereren Ionen bei weitem überwiegt, ist in einem verdünnten Plasma die Relaxationszeit τ charakteristisch für Stoßprozesse zwischen Elektronen und neutralen Teilchen. Ferner läßt sich zeigen [3], daß der Kehrwert von τ mit der Stoßfrequenz ν identisch ist, welche gleich der Zahl der Stöße ist, die ein Elektron in der Zeiteinheit erfährt. ν ist proportional zur Elektronengeschwindigkeit v, zur Konzentration N_0 der neutralen Teilchen und zum Stoßquerschnitt q zwischen Elektron und neutralen Teilchen,

$$\nu = N_0 \, v \, q \,. \tag{11}$$

Der Elektronen-Stoßquerschnitt q ist eine für jedes Atom oder Molekül charakteristische Größe; er ist im allgemeinen eine Funktion des Elektronenimpulses [4].

In Festkörpern, Metallen wie Halbleitern, ist eine unmittelbare Deutung der Relaxationszeit τ schwieriger. Als Stoßprozesse kommen hauptsächlich Streuung der quasifreien Ladungsträger an Phononen und Gitterfehlstellen in Frage.

Bedingungen für ein Auftreten negativer Leitfähigkeiten

Der die Absorption charakterisierende Realteil der Leitfähigkeit, senkrecht zum Magnetfeld, für ein zirkular polarisiertes elektrisches Feld ergibt sich aus Gl. (8) zu

$$\sigma'_{\pm} = -\frac{4\pi}{3} e^2 \int_0^\infty \frac{\tau}{1+(\omega \pm \omega_c)^2 \tau^2} \, \frac{1}{m} \, p^3 \, \frac{\partial f_0}{\partial p} \, \mathrm{d}p \,. \tag{12}$$

Die Struktur dieser Gleichung läßt folgendes erkennen: Wenn man davon absieht, daß in einem Kristallgitter die Trägermasse m auch negativer Werte [5] fähig ist, so ist das Vorzeichen von $\sigma'_{\pm}$ lediglich durch dasjenige von $\partial f_0/\partial p$ bestimmt, da alle anderen Faktoren des Integranden positiv sind. Ist $\partial f_0/\partial p$ negativ, was z. B. bei FERMI- oder bei BOLTZMANN-Verteilung der Fall ist, so ist $\sigma'_{\pm}$ stets positiv. Dieses Verhalten ist natürlich zu erwarten, da ja eine Erzeugung elektrischer Energie in einem im thermischen Gleichgewicht befindlichen Plasma dem Entropiesatz widersprechen würde. Die notwendige Bedingung für ein Auftreten negativer Leitfähigkeiten lautet daher:

$$\partial f_0/\partial p > 0 \,. \tag{13}$$

Dies heißt, daß sich in einem gewissen Energiebereich mehr Teilchen in einem Zustand höherer als in einem von niederer kinetischer Energie befinden müssen. Bekanntlich ist eine solche Überbesetzung der Energieniveaus auch notwendig für ein Auftreten von erzwungener Emission in einem Maser. Als Beispiel für ein solches System werde ein Elektronengas betrachtet, in welchem alle Teilchen nahezu den gleichen Impulsbetrag p_0 haben. Abb. 1 zeigt

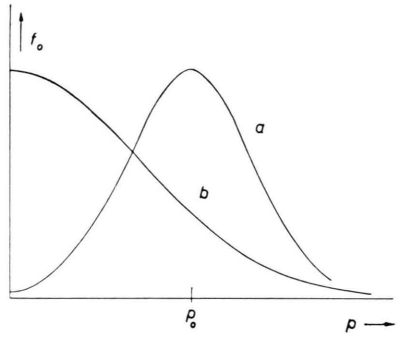

Abb. 1. Beispiel einer Impulsverteilung, bei der eine „Überbesetzung" der kinetischen Energie vorliegt (a), verglichen mit einer BOLTZMANN-Verteilung (b).

das Auftreten eines Bereiches, in dem $\partial f_0/\partial p$ positiv ist. In diesem Fall befindet sich das Plasma natürlich in einem instabilen Zustand und es wird bestrebt sein, durch erzwungene Emission oder durch Stoßprozesse ins thermische Gleichgewicht zurückzukehren.

In einem schwach ionisierten Gas kommen hierfür, wie weiter oben dargelegt wurde, hauptsächlich Stoßprozesse zwischen Elektronen und neutralen Molekülen in Betracht. Ein Elektron der Masse m kann bei einem elastischen Stoß mit einem schweren Teilchen der Masse M, dessen Geschwindigkeit gegenüber derjenigen des Elektrons vernachlässigbar sei, günstigenfalls den $4\,m/M$-ten Teil seiner kinetischen Energie verlieren. Auf Grund dieser sehr

[3] F. SEITZ, The Modern Theory of Solids, McGraw-Hill, New York 1940, S. 168.

[4] siehe z. B.: R. KOLLATH, in Handbuch der Physik XXXIV, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

[5] Negative effektive Massen schwerer Löcher in Ge wurden kürzlich durch Zyklotronresonanz-Experimente nachgewiesen; siehe: G. C. DOUSMANIS, R. C. DUNCAN JR., J. J. THOMAS u. R. C. WILLIAMS, Phys. Rev. (Lett.) 1, 404 [1958]; siehe auch: H. KRÖMER, Proc. Inst. Radio Engrs. 47, 397 [1959].

schwachen Stoßkopplung zwischen dem Elektronengas und dem Gas der schweren neutralen Moleküle sind daher sehr viele Stöße erforderlich, bis sich thermisches Gleichgewicht zwischen den beiden Gasen eingestellt haben wird. Die hierfür charakteristische Einstellzeit ist von der Größenordnung $M\,\tau/4\,m$, da ja $1/\tau$ die Zahl der Stöße eines Elektrons in der Zeiteinheit war. Es besteht daher eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß bei Anwesenheit eines hinreichend starken elektrischen Feldes die Einstellung des thermischen Gleichgewichts bevorzugt durch erzwungene Emission erfolgt.

In einem Plasma, welches sich in einem Zustand $\partial f_0/\partial p>0$ befindet, tritt also zu dem durch die Relaxationszeit τ charakterisierten Ausgleich zwischen der ursprünglichen Verteilungsfunktion f_0 und der durch das elektrische Feld gestörten Verteilungsfunktion f noch ein durch eine Relaxationszeit der Größenordnung $M\,\tau/m$ charakterisierter Ausgleich der Verteilungsfunktion f_0 an einen dem thermischen Gleichgewicht entsprechenden Wert auf. Da jedoch der erste Relaxationsprozeß um Größenordnungen schneller abläuft als der zweite, dürfte es gerechtfertigt sein, in der BOLTZMANNschen Transportgleichung (1) die Verteilungsfunktion f_0 innerhalb eines gewissen Zeitraumes als zeitlich konstant anzunehmen.

Es sei hier nicht näher untersucht, wie sich eine Überbesetzung des Elektronengases, d. h. ein Zustand $\partial f_0/\partial p>0$ experimentell realisieren läßt. Man könnte erwarten, daß dies z. B. durch einen starken elektrischen Impuls möglich wäre, der dann die Rolle der für den Betrieb eines Masers erforderlichen „Pumpe" übernehmen würde.

Für ein Auftreten negativer Werte von $\sigma'_\pm$ ist die Bedingung (13) zwar notwendig, aber durchaus nicht hinreichend. Wie schon weiter oben erwähnt wurde, ist z. B. für den Sonderfall einer impulsunabhängigen Relaxationszeit und Trägermasse die Leitfähigkeit $\sigma_\pm$ unabhängig von der Struktur der Verteilungsfunktion f_0, siehe Gl. (10), so daß hier der Realteil von $\sigma_\pm$ stets positiv sein wird. Negative Werte von $\sigma'_\pm$ sind daher nur zu erwarten, wenn die Bedingung (13), $\partial f_0/\partial p>0$, durch die Forderung ergänzt wird, daß Relaxationszeit oder Trägermasse in geeigneter Weise vom Impuls abhängen. Hierauf wird in den beiden nächsten Abschnitten näher eingegangen werden.

Abschließend sei noch erwähnt, daß die integrale Absorption einer Zyklotronresonanz-Linie unabhängig von τ und m und stets positiv ist, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_\pm \, \mathrm{d}B = \pi\,|e|\,c\,N\,. \tag{14}$$

Impulsabhängigkeit der Relaxationszeit

Die Bedeutung einer Impulsabhängigkeit der Relaxationszeit für ein Auftreten negativer Leitfähigkeiten $\sigma'_\pm$ werde in diesem Abschnitt näher erläutert, wobei die Trägermasse m hier als impulsunabhängig vorausgesetzt sei. Um die mathematische Analyse zu vereinfachen, werde als Beispiel für eine Verteilungsfunktion f_0, welche positive Werte von $\partial f_0/\partial p$ aufweist, die Deltafunktion

$$f_0=\frac{N}{4\,\pi\,p_0^2}\,\delta(p-p_0) \tag{15}$$

genommen, welche als Grenzfall der in Abb. 1 gezeigten Verteilungsfunktion a angesehen werden kann und welche der Normierungsbedingung (9) genügt. In diesem Fall besitzen alle Ladungen den

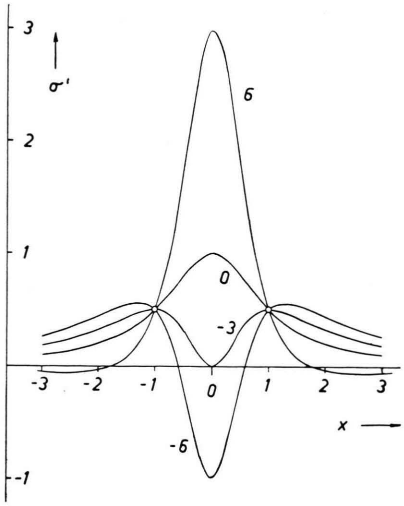

Abb. 2. Zyklotronresonanz-Linien monoenergetischer Elektronen für impulsabhängige Relaxationszeiten $\tau \propto p^{\alpha}$. Der Realteil σ', in Einheiten von $N\,e^2\,\tau/m$, ist als Funktion von $x=(\omega-\omega_c)\,\tau$ aufgetragen, mit α als Parameter.

gleichen Impulsbetrag p_0. Aus den Gln. (8) und (9) ergibt sich dann durch partielle Integration

$$\sigma_\pm=\frac{N\,e^2}{m}\,\frac{1}{3\,p_0^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\frac{\tau\,p^3}{1+i(\omega\pm\omega_c)\,\tau}\right\}_0$$

und

$$\sigma'_\pm=\frac{N\,e^2\,\tau_0}{m}\left\{\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{3}\,\frac{p_0}{\tau_0}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}p}\right)_0\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right\}, \tag{16}$$

wobei $x = (\omega \pm \omega_c)\,\tau$. Der Index 0 deutet darauf hin, daß alle impulsabhängigen Größen für $p = p_0$ zu nehmen sind. Der obigen Gleichung ist zu entnehmen, daß $\sigma'_\pm$ negativer Werte fähig ist, wenn

$$\frac{1}{3}\,\frac{p_0}{\tau_0}\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}p}\right|_0 > 1\,. \tag{17}$$

Ein einfaches Beispiel für ein solches Verhalten liegt vor, wenn die Relaxationszeit τ proportional zur Potenz α des Impulses der freien Ladungsträger ist. In schwach ionisierten Gasen ist dann der Elektronen-Molekül Stoßquerschnitt q nach Gl. (11) proportional zur Potenz $-\alpha-1$ des Elektronenimpulses. Die Bedingung (17) lautet damit: $|\alpha| > 3$. Abb. 2 zeigt ein Auftreten negativer Werte des Realteiles $\sigma_\pm'$ in der Nähe der Zyklotronresonanz $x = 0$, für verschiedene Parameter α. Für $\alpha = 0$ ergibt sich eine LORENTZ-Kurve.

Die Frequenzabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit σ' bei Abwesenheit eines Magnetfeldes, d. h. für $\omega_c = 0$, wird ebenfalls durch Abb. 2 dargestellt. Die dimensionslose Größe $x = \omega\,\tau$ ist dann jedoch stets positiv.

Impulsabhängigkeit der Trägermasse

In diesem Abschnitt werde die Relaxationszeit als impulsunabhängig vorausgesetzt, während jetzt die Trägermasse eine Funktion des Impulses sei. Dies ist z. B. der Fall in hinreichend heißen Plasmen, in welchen die relativistische Abhängigkeit der Elektronenmasse vom Elektronenimpuls nicht länger vernachlässigt werden darf. Ebenso ist in Festkörpern die effektive Masse der Träger im allgemeinen als eine impulsabhängige Größe anzusehen.

Als Verteilungsfunktion f_0 mit positiven $\partial f_0/\partial p$ werde, wie im vorangehenden Abschnitt, die Deltafunktion (15) genommen. Durch partielle Integration der Gl. (8) folgt dann

$$\sigma'_- = \frac{N e^2 \tau}{m_0}\left\{\frac{1}{1+(\omega-\omega_c)^2\,\tau^2} - \frac{1}{3}\,\frac{p_0}{m_0}\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}\right)_0 \frac{1+(\omega^2-\omega_c^2)\,\tau^2}{[1+(\omega-\omega_c)^2\,\tau^2]^2}\right\} \tag{18}$$

wobei die impulsabhängigen Größen m und ω_c wiederum für $p = p_0$ zu nehmen sind. Als Beispiel für einen Träger mit impulsabhängiger Masse m werde ein relativistisches Teilchen der Ruhemasse μ betrachtet. Für dieses gilt $m^2 c^2 = \mu\, c^2 + p^2$, so daß

$$\frac{p}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p} = \left(\frac{v}{c}\right)^2, \tag{19}$$

wobei v die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Bei konstantem Magnetfeld kann jetzt σ'_- in der Nähe der Zyklotronresonanzfrequenz negativ werden, wenn

$$\frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2 (\omega_c\,\tau + 1) > 1\,. \tag{20}$$

Im Gegensatz zu den Verhältnissen des vorigen Abschnittes ist hier das Vorhandensein eines Magnetfeldes notwendig für ein Auftreten negativer Leitfähigkeiten. Da nämlich $(v/c)^2$ im allgemeinen sehr klein sein wird, muß $\omega_c\,\tau$ sehr groß sein, um die Bedingung (20) zu erfüllen. Da ferner $1/\tau$ die Linienbreite charakterisiert, werden negative Leitfähigkeiten nur bei sehr scharfen Zyklotronresonanz-Linien auftreten.

Es sei erwähnt, daß diese Ergebnisse bereits in einer früheren Arbeit [6] durch quantenmechanische Behandlung erhalten wurden. In dieser Arbeit findet sich auch eine graphische Darstellung der durch (18) gegebenen Leitfähigkeit σ'_-.

Quantenmechanische Formulierung

Die Behandlung der Zyklotronresonanz nach den Methoden der klassischen Physik ist im allgemeinen gerechtfertigt, da die quantenmechanische Rechnung praktisch zu dem gleichen Ergebnis führt. Die SCHRÖDINGER-Gleichung einer freien Ladung in einem homogenen Magnetfeld weist nämlich eine starke Ähnlichkeit mit derjenigen des zweidimensionalen harmonischen Oszillators auf, die sich auch darin ausdrückt, daß die kinetische Energie W der freien Ladung, senkrecht zum Magnetfeld, quantisiert ist [7], gemäß:

$$W_j = (j + 1/2)\,\hbar\,\omega_c\,; \quad j = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{21}$$

Ferner sind nur Übergänge zwischen benachbarten Niveaus erlaubt, wobei, wenn die Trägermasse m impulsunabhängig ist, stets dieselbe Frequenz ω_c auftritt. Strenggenommen ist es daher nicht mehr zulässig, den freien Ladungen eine kontinuierliche Energieverteilung zuzusprechen. Unter den üblichen experimentellen Bedingungen ist jedoch W_j sehr viel größer als $\hbar\,\omega_c$, so daß die Quantisierung der Bewegung nicht nennenswert in Erscheinung tritt [8]. Es sei auch erwähnt, daß eine quantenmechanische Behandlung der Zyklotronresonanz in gewisser Hin-

[6] J. SCHNEIDER, Phys. Rev. (Lett.) **2**, 504 [1959].

[7] L. LANDAU, Z. Phys. **64**, 629 [1930]. — L. PAGE, Phys. Rev. **36**, 444 [1930]; siehe auch Anm. [3], S. 583.

[8] Für 10 000 GAUSS ist $\hbar\,\omega_c$ etwa 0,0001 eV.

sicht anschaulicher ist als die hier durchgeführte klassische Rechnung. Insbesondere lassen sich die bei Zyklotronresonanz auftretenden Emissions- und Absorptionsprozesse als Übergänge zwischen den Landau Niveaus (21) deuten. Auf diese Weise wurden auch die Formeln (16) und (18) durch die quantenmechanische Rechnung voll bestätigt. Hierüber wird an anderer Stelle berichtet werden [9].

Anwendungen

Falls es gelingt Zustände negativer elektrischer Leitfähigkeiten experimentell zu realisieren, eröffnet sich die Möglichkeit, ein Plasma als Verstärker oder als Generator von Mikrowellen zu verwenden. Die für ein Auftreten negativer Leitfähigkeiten erforderlichen Bedingungen seien noch einmal kurz zusammengefaßt:

1. Die Verteilungsfunktion f_0 muß positive Werte von $\partial f_0/\partial p$ aufweisen; dies entspricht einer Überbesetzung der Niveaus der kinetischen Energie der freien Ladungsträger. Es muß also ein geeigneter „Pump"-Mechanismus gefunden werden, um einen solchen Zustand über eine gewisse Zeitdauer zu erzeugen.

2. Relaxationszeit oder Trägermasse müssen in geeigneter Weise vom Impuls abhängen. Ist die Masse konstant, so läuft für schwach ionisierte Gasplasmen diese Forderung darauf hinaus, neutrale Atome oder Moleküle zu finden, welche eine geeignete Impulsabhängigkeit des Elektronen-Molekül-Stoßquerschnittes aufweisen.

Befindet sich das Plasma in einem Hohlraumresonator, so wird es in diesem Schwingungen anregen, wenn die vom Plasma abgegebene Leistung $-\sigma' E^2$ die Resonatorverluste $\omega E^2/8\pi Q$ überwiegt. Hierbei ist E der Betrag der elektrischen Feldstärke und Q die Güte des Resonators unter Einschluß der Kopplungsverluste *(loaded Q)*. Als numerisches Beispiel werde ein Plasma untersucht, dessen Ladungsträger eine impulsunabhängige Masse besitzen, während die Relaxationszeit proportional zur Potenz -6 des Impulses sei. Sind alle freien Ladungen ursprünglich monoenergetisch, so ist nach Gl. (16) die Leitfähigkeit im Resonanzfall $\omega = \omega_c$ negativ, $\sigma' = -N e^2 \tau/m$, und die Bedingung für ein Auftreten von Schwingungen lautet:

$$N e^2 \tau/m > \omega/8\pi Q\,. \qquad (22)$$

Um mit niedrigen Elektronendichten N auszukommen, sollte die Relaxationszeit τ möglichst groß sein, d. h. nach Gl. (11) der Gasdruck der neutralen Moleküle möglichst niedrig. Eine obere Grenze für τ ergibt sich jedoch aus der Forderung, daß die freie Weglänge der Elektronen parallel zum Magnetfeld, $l = v\,\tau$, kleiner als die Dimensionen des Resonators sein soll, da sonst an Stelle der erforderlichen Elektron-Molekül-Stöße nur Wandstöße auftreten.

Bei X-Band Frequenzen, $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ Hz, kann die Güte Q eines Resonators etwa 15 000 betragen. Für Elektronen lautet damit die obige Bedingung (22): $N\tau > 6{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-3}\,\mathrm{sec}$. Haben die Elektronen eine kinetische Energie von 1 eV, so beträgt ihre Geschwindigkeit $5{,}9 \cdot 10^7\,\mathrm{cm\,sec}^{-1}$. Bei einer maximal zulässigen freien Weglänge von 1 cm ist dann $\tau = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ sec, so daß eine Elektronenkonzentration von $4 \cdot 10^4\,\mathrm{cm}^{-3}$ erforderlich wäre, um im Resonator Schwingungen zu erregen. Verglichen mit der für den Betrieb eines paramagnetischen Masers erforderlichen Spinkonzentration ist dies ein sehr niedriger Wert. Es sei jedoch daran erinnert, daß bei Zyklotronresonanz elektrische Übergänge auftreten, die um viele Größenordnungen intensiver sind als die magnetischen Übergänge der Elektronen Spinresonanz.

[9] Für eine kurze Darstellung dieser Methode siehe Anm. [6].